ATTORNO AL LIMITE MATEMATICO

a cura di Fabio Frattini per gli incontri interdisciplinari

Prima di introdurre il concetto moderno di limite matematico, vogliamo illustrare un brillante precedente che in qualche modo lo riecheggia. Parliamo del pensiero e dell'opera di sant'Anselmo d'Aosta (poi di Canterbury) che in pieno XI secolo, partendo da un elemento di Fede, affrontò con strumenti dialettici ed ontologici il problema della dimostrazione dell'esistenza di Dio.

Anselmo nacque ad Aosta nel 1033, studiò presso l'abbazia di Bec, in Normandia, e nel 1063 ne divenne il priore, per poi diventarne Abate nel 1078. Nel 1093 fu nominato arcivescovo di Canterbury e tale rimase fino alla sua morte nel 1109. La produzione delle sue opere fu considerevole e spazia dalla filosofia alla teologia. Gli anni passati a Bec furono per lui i più fecondi, liberi da preoccupazioni dovute a cariche particolarmente onerose, come avverrà poi in seguito, e gli consentirono di sviluppare il proprio metodo dialettico, mantenendo però un rigoroso equilibrio tra ragione e fede e rispettando le prerogative di entrambe. In questi anni, certi monaci dell'abbazia di Bec, i quali desideravano un modello di meditazione sull'esistenza e sull'essenza di Dio in cui tutto dovrebbe essere provato con la ragione ed assolutamente nulla dovrebbe essere fondato sull'autorità della Scrittura, fecero richiesta ad Anselmo in tal senso; tutto questo con lo sfondo polemico tra dialettici ed antidialettici caratteristico dell' XI secolo.

L'impegno di Anselmo lo portò a sviluppare diverse opere: dapprima il *Monologion*, poi il *Proslogion,* il *De* Veritate, alcuni trattati di contorno e varie lettere esplicative. La prova che a noi interessa è quella consolidata nel *Proslogion*, in cui alle forme delle prove, che erano state sviluppate precedentemente nel *Monologion*, viene aggiunto un argomento ontologico che porta ad un'unica forma definitiva.

"La fede ci fornisce l'idea di Dio."

"Noi crediamo che Dio esista e che Egli sia l'essere di cui non possiamo concepirne uno maggiore."

(Ma una tale natura esiste o no?)

"Lo stolto ha detto in cuor suo: Dio non esiste" (salmo XIII, I).

Ma se diciamo davanti allo stolto di un essere di cui non è possibile concepirne uno maggiore, egli capisce ciò che noi diciamo, e ciò che egli capisce esiste nella sua intelligenza anche se egli non ne percepisce l'esistenza. Si può quindi convincere lo stolto stesso che, almeno nel suo spirito, esiste un essere di cui è impossibile concepirne uno maggiore, perché, se egli intende enunciare ciò, egli lo comprende, e tutto ciò che si comprende esiste nell'intelligenza. Ora, ciò di cui non è possibile concepire nulla di più grande non può esistere soltanto nell'intelligenza. Infatti l'esistere in realtà è essere ancor più grande che esistere nell'intelligenza soltanto, quindi l'essere di cui è impossibile concepire qualcosa di maggiore esiste indubbiamente sia nell'intelligenza che nella realtà.[1]

[1] I principi su cui poggia l'argomentazione sono i seguenti:

1) una nozione di Dio fornita dalla fede,
2) l'esistere nel pensiero è già veramente esistere,
3) l'esistenza della nozione di Dio nel pensiero esige logicamente che si affermi che Egli esiste in realtà.

Naturalmente nacquero subito violente critiche, che si riproposero anche in tempi successivi. Al monaco Gaunilone, che obbiettava che non ci si può fondare sull'esistenza nel pensiero per concludere all'esistenza fuori del pensiero, Anselmo risponde che il passaggio dall'esistenza nel pensiero all'esistenza nella realtà non è possibile e necessario che quando si tratti dell'essere più grande che si possa concepire, cioè la nozione di essere presa in senso assoluto, e ciò è proprio soltanto di Dio, da cui non si può pensare ch'Egli non esista.

Abbandoniamo per il momento la "prova" di Anselmo ed introduciamo la nozione di "limite matematico".

Il concetto di limite era già presente in modo intuitivo nell'antichità, per esempio in Archimede (nel suo metodo di esaustione), e fu utilizzato, anche se non in modo rigoroso, a partire dalla fine del XVII secolo da Newton, Leibniz, Eulero e D'Alembert.
La prima definizione abbastanza rigorosa di limite risale al XIX secolo con Cauchy, seguita da una miglior formalizzazione di Weierstraβ.
Una completa teoria del limite si ha con Heine, che nel 1872 pubblicò un lavoro che creò molto interesse all'epoca e nel quale stilò regole e proprietà del limite. Molti altri studiosi si sono interessati al problema del limite, approfondendo l'argomento con lo studio dell'analisi infinitesimale, tra cui Bolzano, Dedekind e Cantor.

Ma solo nel 1922 Eliakim Hastings Moore ed H.L. Smith diedero una nozione generale (topologica) di limite, ed è quella attualmente utilizzata in matematica. Nel 1937, Henri Cartan ne fornì una versione equivalente, basata sul concetto di filtro.

Il concetto di limite è importantissimo per definire molte proprietà delle espressioni matematiche, quali le successioni, le funzioni e gli insiemi. Tramite esso si definisce, ad es., la continuità di una funzione. Inoltre esso è alla base dei concetti sia di derivata che di integrale e, quindi, di tutta l'analisi infinitesimale.

Il limite viene concepito in matematica come il valore che viene ad assumere una funzione all'approssimarsi del suo indice di riferimento ad un dato riferimento (definizione generalissima). Tale definizione la si può estendere sia alle successioni (e serie) e sia all'insiemistica, tramite i concetti di filtro ed ultrafiltro.

Per il nostro discorso, ci limitiamo al concetto di limite nell'ambito delle funzioni, considerando che le stesse concezioni, con i dovuti adattamenti, valgono anche negli altri ambiti. Tradotta nel linguaggio delle funzioni, la definizione diventa:

Il **limite di una funzione** in un punto x_0 di accumulazione all'interno del suo dominio (*X*) è un modo per esprimere la quantità a cui tende il valore assunto dalla funzione all'avvicinarsi del suo argomento a x_0. Indicando con $f(x)$ la funzione, il limite viene indicato con la notazione:

$\lim_{x \to x_0} f(x)$ per cui $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ significa che all'approssimarsi di x ad x_0, esprimibile con $x \to x_0$, il valore assunto dalla funzione si avvicina ad l, cioè $f(x) \to l$.
Il valore l può essere finito, infinito, o non esistere per niente. Potremmo anche dire, in un certo senso, che il limite segue il comportamento di un oggetto matematico quando una o più variabili del suo dominio tendono ad assumere un determinato valore.

Va precisato che il limite della funzione nel punto x_0 non coincide necessariamente con il valore che la funzione assume nel punto x_0, ma è un valore di tendenza che assume la funzione allo "approssimarsi" del suo argomento a x_0. In altre parole, se ad esempio la funzione $f(x)$ assume valore 2 per tutti gli x tranne che nel punto x_0 in cui assume il valore 3, sarà che

$\lim_{x \to x_0} f(x)$ è uguale a 2 e non uguale a 3, come qualcuno potrebbe pensare.

La definizione maggiormente utilizzata al giorno d'oggi, equivalente a quanto detto sopra, che usa gli "intorni" è la seguente: l è limite se per ogni intorno U di l in $\mathbb{R}$ esiste un intorno V di x_0 in $\mathbb{R}$ tale che $f(x)$ appartiene a U per ogni $x \neq x_0$ in $V \cap X$, dove X è il dominio di f. Il valore x_0 non è necessariamente contenuto nel dominio di f. Il valore è comunque escluso nella definizione di limite, poiché il limite deve dipendere soltanto dai valori di f in punti arbitrariamente vicini a x_0 ma non dal valore che f assume in x_0: per questo motivo si chiede che $|x - x_0|$ sia maggiore di zero.

La nozione di limite viene normalmente estesa per considerare anche i casi in cui x_0 e/o l siano infiniti. Cioè, ad es., sia:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$$

analogamente, la stessa definizione si adatta se il limite è pari a -∞.

Per definire il limite quando è x_0 a tendere all'infinito ($x_0 \to +\infty$) è ancora necessario che +∞ sia un punto di accumulazione per il dominio *X* della funzione. Ciò significa che *X* deve contenere valori arbitrariamente grandi e quindi che il suo estremo superiore sia infinito, cioè:

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$ nel caso in cui l sia finito, oppure

(analogamente si definisce il limite per $x \to -\infty$)

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ nel caso in cui il limite sia infinito

(analogamente la definizione vale per il limite pari a -∞).

Vale la pena di citare alcune conseguenze terminologiche dovute al concetto di limite.

Se il limite per $x \to x_0$ di $f(x)$ è 0, $f(x)$ si dice *infinitesima* o *convergente* in x_0.

Se $f(x)$ tende a $\pm\infty$ la funzione è detta *divergente*.

Se x_0 è contenuto nel dominio *X* di f e se vale:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

cioè il limite coincide col valore della funzione in x_0, allora la funzione è continua in x_0. Ciò vale anche come definizione della continuità di una funzione. Questo concetto è molto importante in matematica: in ogni punto x_0 del suo dominio, la f assume in x_0 il valore del suo limite per $x \to x_0$. Altrimenti la funzione ha in x_0 un **punto di discontinuità** e la funzione in quel punto non ha limite definito. Il **teorema dell'unicità del limite** recita che se esiste il limite di una funzione in un punto del suo dominio, tale limite è unico in quel punto ed è finito e coincidente sia da destra che da sinistra. Se la funzione avesse in x_0 un punto di discontinuità, si avrebbe che il limite da destra sarebbe diverso da quello di sinistra, sia esso finito oppure $\pm\infty$.

Come caso di funzione che non ammette limite, limite non esistente affatto, prendiamo la funzione seno [sin(x)]. Tale funzione, al variare dell'angolo x, oscilla indefinitamente tra -1 e +1 e, quindi, non tende a nessun limite preciso per $x \to \infty$.

Non riportiamo qui, comunque, tutti i teoremi e le proprietà, nei vari campi di applicazione, che afferiscono al limite matematico, accontentandoci di aver dato solo un piccolo sguardo sul suo concetto.

Per concludere, riprendiamo la "prova" di Anselmo per osservarne alcuni aspetti alla luce del concetto matematico di limite, così come è stato presentato.

La prova si sviluppa attraverso una successione di considerazioni (atti di pensiero) in cui si richiede che l'attuale consideri maggiore l'oggetto del precedente. Questo processo potrebbe andare avanti indefinitamente: per quanto posso pensare a qualcosa di grande, c'è sempre qualcosa di maggiore a cui posso pensare fino a ciò, puramente concettuale, di cui non posso pensare nulla di maggiore. Tutto questo lo potrei esprimere, con linguaggio matematico, come una successione ordinata di entità (E_n), con indice n, con $n \to \infty$, per cui potrei indicare:

$$E_{n+1} > E_n \qquad \lim_{n\to\infty} (E_n) = (?)$$

Al lettore la conclusione.

<u>Bibliografia</u>:

Etienne Gilson, *La filosofia nel Medioevo* – La Nuova Italia, 1973.

Ennio De Giorgi, *Lezioni di Istituzioni di Matematica 1*, Ferrara, De Salvia, 1972.

Miller, N. *Limits: An Introductory Treatment*- Waltham, MA: Blaisdell, 1964.

Kaplan, W. *"Limits and Continuity."* §2.4 in *Advanced Calculus, 4th ed*. Reading, MA: Addison-Wesley, pp. 82–86, 1992.

Wikipedia: Portale Matematico.