# ragioniamo o... calculemus?

Leibniz aveva un sogno:

> "quando orientur controversiae, non magis disputatione opus erit inter duos philosophos, quam inter duos Computistas. Sufficiet enim calamos in manus sumere sedereque ad abacos, et sibi mutuo (accito si placet amico) dicere: *calculemus*"[1].

Traduco un po' liberamente:

> "quando nasceranno controversie, non ci sarà bisogno di disputare tra due filosofi più che fra due ragionieri. Infatti basterà prendere in mano le penne e sedere davanti agli abachi e dirsi reciprocamente (se è pronto l'amico che avete chiamato): *calcoliamo*"

Dai tempi di Roberto Grossatesta e Ruggero Bacone, che sognavano di matematizzare in qualche modo la filosofia, questo sogno dura fino ai nostri giorni, o, meglio, fino a quando Kurt Gödel ha escluso la possibilità di un sistema formale sufficientemente interessante (complesso almeno quanto la matematica dei numeri naturali) dove la coerenza logico-formale fosse unita alla completezza: ogni proposizione doveva essere o un assioma o un teorema dimostrabile.

Il livello più generico della logica formale considera le proposizioni ed i loro rapporti: il calcolo proposizionale. Ci si interroga circa la validità di una data espressione o la sua soddisfacibilità. Essa è valida se risulta sempre vera qualsiasi sia il valore di verità delle proposizioni che vi compaiono; è soddisfacibile se risulta vera per almeno una distribuzione dei valori di verità delle proposizioni che vi compaiono.

Esempio: "Se piove, allora piove": $(p \rightarrow p)$ è valida; "piove e soffia tramontana" $(p \,\&\, q)$ è soddisfacibile: risulta vera se entrambe le proposizioni sono vere, altrimenti è falsa.

La forma di argomentazione più generale, in questo calcolo, è il *modus ponens*:

> poniamo che se $p$ è vera, allora anche $q$ deve essere vera,
>
> poniamo anche che $p$ sia vera,
>
> allora è vera anche $q$.

Supposto che noi verifichiamo la conseguenza, come avviene usando il metodo sperimentale, ci renderemo subito conto che questo non implica la verità della premessa, a meno che essa sia in qualche modo l'unica ipotesi possibile.

Persino in matematica, dove non si usa il metodo sperimentale, ma nella quale comunque si usa il *modus ponens*, abbiamo un analogo atteggiamento verso gli assiomi, cioè i primi principi da cui dedurre i teoremi di una scienza. Il prof. Lamberto Cattabriga diceva di usare gli assiomi di Zermelo-Fraenkel, ma se un giorno ne avesse dedotto qualche paradosso non avrebbe gettato via il calcolo delle derivate e degli integrali: avrebbe gettato via gli assiomi, cercandone altri.

Paradossalmente, la certezza c'è solo nel falsificare l'ipotesi se la conseguenza non si verifica. Resta però vero che il moltiplicarsi delle prove sperimentali aumenta la nostra fiducia nella verità della premessa. In questo modo possiamo parlare di "fede" nei primi principi di un sapere dimostrativo.

Possiamo anche notare che non c'è bisogno di usare la forma del condizionale e la negazione. Dire $(p \rightarrow q)$, cioè "se $p$, allora $q$", è lo stesso che dire $[\neg\, (p \,\&\, \neg q)]$, dove il segno "¬" significa la negazione, mentre "&", la congiunzione, significa che entrambe le proposizioni devono essere vere

1 *De arte characteristica ad perficiendas scientias ratione nitentes* in C. I. Gerhardt (ed.), *Die philosophischen Schriften von Gottfried Wilhelm Leibniz* (7 vols. 1875–1890) VII, pag. 200.

perché sia vera la loro congiunzione;

oppure è lo stesso che dire:

($\neg$ *p* oppure *q*),

dove l'oppure, la disgiunzione (il "vel" latino, che esclude solo la falsità di entrambe, da non confondere con l' "aut") viene solitamente reso col segno "$\vee$".

Si può sviluppare il calcolo proposizionale usando qualsiasi "connettivo" proposizionale. Inoltre si può incorporare la negazione nei connettivi tra due proposizioni. Ad esempio gli elettronici hanno trovato comodo realizzare congegni il cui comportamento equivale alla negazione di una congiunzione oppure alla negazione di una disgiunzione: le porte NAND e NOR. Al posto del vero e del falso ci sarà l'apertura o la chiusura del circuito.

Invece, entrando nella considerazione dei soggetti e dei predicati, ed in particolare nella logica sillogistica (insiemistica), il primo principio è quello che gli scolastici chiamavano "*dictum de omni*".

Aristotele enunciò così i principi della logica formale sillogistica:

> "In effetti, se A si predica di ogni B, e se B si predica di ogni C, è necessario che A venga predicato di ogni C. Già prima infatti si è detto in che modo intendiamo il venir predicato di ogni oggetto. Similmente poi, se A non si predica di nessun B, e se B si predica di ogni C, A non apparterrà a nessun C."[2].

E prima aveva appunto detto:

> "Usiamo così l'espressione: *venir predicato di ogni oggetto*, quando non sia possibile cogliere alcun oggetto - tra quelli che costituiscono il sostrato - di cui non si dica l'altro termine. E lo stesso accade per l'espressione: *venir predicato di nessun oggetto*."[3].

Aristotele prese in considerazione anche il caso di premesse non universali, ed anche i modi di dire che usiamo quando il termine M si trova sempre al soggetto o sempre al predicato, Galeno svilupperà la quarta figura possibile: l'inverso della prima. A noi interessa rilevare solo che egli ne valutava la validità dimostrativa, se le premesse erano vere, riconducendole ai due casi che erano immediatamente evidenti:

> se ogni M è P ed ogni S è M, allora ogni S è P
>
> se nessun M è P e ogni S è M, allora nessun S è P.

**In che cosa consiste la logica formale?**

A scuola ci insegnano una risposta molto semplice: la logica formale prescinde dalle cose di cui si parla (e può usare dei simboli qualsiasi).

Cane e gatto sono due specie del regno animale. Questo ci permette di dire che ogni cane è un animale ed ogni gatto pure. Non possiamo invece dire che ogni animale è un cane o che ogni animale è un gatto. Se chiamiamo, senza pretese di rigore, "insieme" l'estensione di un nome, cioè tutte quelle cose delle quali è vero predicare quel nome, diremo che l'insieme dei cani è incluso in quello degli animali e non viceversa. Ma in logica formale prescinderemo da cani, gatti …. Parleremo di insieme C incluso nell'insieme A. Anzi, è molto importante mettere da parte i significati reali, altrimenti rischiamo di non accorgerci degli errori formali.

Si può fare un esempio. Ad uno studente (di uno studentato religioso) diciamo: "Ogni ente

2 *Primi Analitici* 25 b 37 - 26 a 1; trad. di G. Colli, in Aristotele, *Organon*, Laterza, Bari 1955, tre voll..; vol. I, pp.96-97.

3 *Ibidem*, 24 b 27-30; trad. it. Colli, p. 93.

immortale è immateriale e l'anima umana è immateriale: dunque l'anima umana è immortale" e gli chiediamo se il ragionamento sia corretto. A volte quello casca nella trappola, dichiarando corretta la conclusione che ritiene vera per fede. Se avessimo detto: "Ogni cane è un mammifero e i gatti sono mammiferi, dunque i gatti sono cani", non ci sarebbe cascato. Ma non per aver studiato le regole della logica.

La dimostrazione formale, forse proprio perché prescinde da ciò di cui si parla e dalle precomprensioni in merito che due contendenti possono avere, sembra più oggettiva. Forse per questo si è sognato di poter ridurre a calcolo ogni dimostrazione.

Però c'è una conseguenza inquietante: se ogni ragionamento è in fondo un calcolo formale, che può essere eseguito anche da un calcolatore costruito da noi, non si riesce più a vedere la differenza tra la razionalità dell'uomo e quella di un software. La presenza a se stessi, che coincide con la capacità d'intendere e volere, sembra ancora porre difficoltà, così come l'intuizione dell'immediato, però la fantascienza non pare preoccupata di queste difficoltà, nella fiducia che il progresso della scienza e della tecnica saprà superarle.

**Possiamo però chiederci se la dimostrazione sia solo quella formale ed eventualmente quali differenze ci siano con quella non formale.**

Aristotele, all'inizio della *Metafisica*, insiste molto sul passaggio dall'esperienza alla scienza, (compreso il sapere tecnologico) come passaggio dal "sapere che" al "sapere perché". L'esperienza mi insegna che i funghi crescono al buio. Io sono un contadino appassionato dei funghi, e potrei acquistare certe grotte che sarebbero ideali per una coltivazione di funghi. Ma, prima di investire i miei risparmi, vorrei sentirmi sicuro di non andare incontro a sorprese. I vegetali richiedono il sole: questo desta la mia meraviglia nel vedere i funghi crescere al buio. Se quella dei funghi fosse un'anomalia passeggera? Solo la conoscenza del perché può rassicurarmi: cioè venire a sapere che il metabolismo dei funghi non è per fotosintesi.

Solo il "sapere perché" è propriamente un sapere per evidenza di spiegazioni controllabili alla prova dei fatti, il che genera la scienza; in questo concordano, in qualche modo, sia Aristotele sia logici contemporanei, come un Ernest Nagel[4]. Il "sapere perché" è spesso un porre ordine tra cose che per lo più già si possiedono per osservazioni che, ripetute, formano una esperienza. La novità del "sapere perché" non consiste necessariamente in un andare ad acquisire dati nuovi: il perché poteva essere sotto i nostri occhi senza che lo collegassimo a ciò che destava la nostra meraviglia.

Ma questa dimostrazione coincide con quella formale? Cerchiamo di evidenziare questa differenza.

**Problema: un mattone pesa kg. 1 più il peso di 3/5 del mattone. Quanto pesa il mattone?**

***Dimostrazione fondata sul calcolo algebrico***

Sia x il peso del mattone; abbiamo che:

$x = 1 + 3/5\, x$

Sottraiamo 3/5 $x$ ad entrambi i membri dell'uguaglianza, dove $x$ è i 5/5 di se stesso e 5/5 – 3/5 = 2/5. Abbiamo che:

$2/5\, x = 1$

allora, dividendo entrambi i membri per 2, abbiamo che:

$1/5\, x = ½$ kg.

cioè, moltiplicando entrambi i membri per 5:

$x = 2{,}5$ kg.

4 E. NAGEL, *La struttura della scienza*, Feltrinelli, Milano 1968, pp. 9 ss.

Abbiamo trasformato la stringa che esprimeva il problema nella stringa che esprime la risposta, in base al principio che una uguaglianza resta tale se aggiungiamo o sottraiamo cose uguali a cose uguali (il che avviene anche moltiplicando o dividendo per numeri uguali). L'importante è controllare la correttezza dei passaggi della trasformazione.

***Dimostrazione fondata sulla realtà del mattone***

Supponiamo che il mattone sia uniforme nel suo impasto e che parti uguali abbiano ugual peso. Il peso totale è 5/5, per cui l'informazione di partenza ci dice che 1 kg è il peso di 2/5 del mattone; ogni quinto pesa dunque ½ kg, ed il mattone intero peserà 2,5 kg.

Nel nostro caso l'attenzione riguarda non solo i rapporti fra quantità astratte, ma quelle del mattone in se stesso.

***Se volessimo mettere in forma sillogistica questo ragionamento*** dovremmo evidenziare soggetto e predicato della conclusione (S e P) ed il perché (M) è vero che S è P. Infine dovremmo esplicitare: perché S è M ed M è P.

Questo procedimento per mettere in "forma" il sillogismo andrebbe fatto almeno tre volte, mi pare. <u>Partendo dal sillogismo finale e risalendo all'inizio</u> i passaggi (S è P perché è M) sarebbero, mi pare, i seguenti:

- il mattone intero pesa 2,5 kg. perché pesa cinque volte il peso (½ kg) di 1/5 del mattone;

- il quinto di mattone pesa ½ kg perché è la metà di 2/5 del mattone, che pesano 1 kg;

- 2/5 di mattone pesano 1 kg perché 2/5 sono la differenza tra il peso del mattone intero ed il peso di 3/5 di esso.

Possiamo allora divertirci a sostituire ad S, P ed M quello che serve per completare il controllo formale dei tre sillogismi.

In realtà noi avevamo già capito. Il controllo formale diventa una fatica apparentemente inutile. Non è la correttezza logico-formale, che prescinde dal significato, a renderci evidente la conclusione. Però spesso conviene fare il controllo formale, perché ci sono trappole, le famose *fallacie formali*, dove anche persone attente ed intelligenti cascano senza rendersene conto.

Un ulteriore esempio di dimostrazione nel senso della logica formale lo prendiamo dal *Manuale di logica* di Willard Van Orman Quine[5].

Si tratta di inferire dalla premessa:
**Tutti i cerchi sono figure**
la conclusione
**Tutti coloro che tracciano cerchi tracciano figure**.

Dal punto di vista della logica formale, il procedimento è laborioso e non è riconducibile ad una forma sillogistica. I simboli che Quine usa sono noti, comunque li richiamiamo velocemente:

*(x)*: per ogni *x*

*Fx ⊃ Gx*: se *x* è F allora *x* è G (se *x* è un cerchio allora *x* è una figura).

*(∃x) (Fx . Hyx)*: esiste *x* tale che esso è F e *y* è H rispetto a *x* (esempio: qualunque relazione, azione, azione passiva, come "*x* ama *y*", oppure è amato da..., oppure è più grande di...: nel nostro caso "*y* traccia...")

La premessa, tradotta nei termini della logica simbolica, è
*(x) (Fx ⊃ Gx)*

5 Trad. it. Feltrinelli, Milano 1970 (quarta ed.), pagg. 218-219.

mentre la conclusione cercata è

$(y)\ (\exists x)\ (Fx\ .\ Hyx) \supset (\exists x)\ (Gx\ .\ Hyx)$

Dice il Quine:

> "I passaggi della deduzione dall'una all'altra vengono ora dettati pressoché automaticamente dalle strategie dei quantificatori e del condizionale. Dal momento che la conclusione desiderata è una quantificazione universale, tendiamo per prima cosa a raggiungere questa espressione privata del suo '$(y)$'. Ma essa è un condizionale; allora noi assumiamo la sua antecedente '$(\exists x)\ (Fx\ .\ Hyx)$' e cerchiamo di ottenere la sua conseguente '$(\exists x)\ (Gx\ .\ Hyx)$'. Al fine però di ottenere '$(\exists x)\ (Gx\ .\ Hyx)$' conviene cercare di ottenere '$Gx\ .\ Hyx$' (oppure '$Gz.Hyz$', ecc.). Le espressioni da cui dobbiamo dedurre queste ultime sono '$(x)\ (Fx \supset Gx)$' e '$(\exists x)\ (Fx\ .\ Hyx)$'; quindi, si applica a questi schemi la strategia della eliminazione dei quantificatori, e ben poco rimane all'immaginazione. Completa nei suoi passaggi, la deduzione assume questo aspetto.
>
> | | | |
> |---|---|---|
> | *(1) | $(x)\ (Fx \supset Gx)$ | |
> | **(2) | $(\exists x)\ (Fx\ .\ Hyx)$ | |
> | **(3) | $Fz\ .\ Hyz$ | (2) $z$ |
> | **(4) | $Fz \supset Gz$ | (1) |
> | **(5) | $Gz\ .\ Hyz$ | (3) (4) |
> | **(6) | $(\exists x)\ (Fx\ .\ Hyx)$ | (5) |
> | *(7) | $(\exists x)\ (Fx\ .\ Hyx) \supset (\exists x)\ (Gx\ .\ Hyx)$ | *(6) |
> | *(8) | (y) [$(\exists x)\ (Fx\ .\ Hyx) \supset (\exists x)\ (Gx\ .\ Hyx)$] | (7) $y$" |

Mi pare ovvio dunque che il problema è di trovare come trasformare certe stringhe di segni o derivarne altre, in modo da arrivare a ricavare la stringa cercata. Qualcosa di simile avviene nel risolvere le equazioni in matematica, e si può parlare anche di equazioni logiche[6].

Mentre dal punto di vista aristotelico non formale la cosa è ovvia: il fatto che tutti i cerchi sono figure è appunto il perché, se così vogliamo chiamarlo, chi traccia cerchi traccia figure.

Ovvio è pure che dal punto di vista del calcolo formale non si tratta di capire il perché di una certa cosa. Potremmo dire che il problema non è quello di arrivare all'evidenza di una conclusione (nel senso aristotelico), ma all'evidenza della correttezza di una procedura. In altre parole non si ha l'evidenza di ciò che si dimostra, così come l'uso della procedura per calcolare un quoziente in una divisione piuttosto difficile non mi dà l'evidenza che quello sia il quoziente, ma mi sento certo del risultato solo perché vado a controllare di aver fatto correttamente tutti i passaggi.

Quando uso un computer o una calcolatrice non ho nemmeno l'evidenza di tale correttezza: mi fido del costruttore.

**Concludendo:** mi sembra che il conoscere riguardi più propriamente ciò che diciamo esserci evidente, e parlando di scienza, razionalità e dimostrazione noi rischiamo di confondere conoscenze diverse.

6 Cfr. E. CARRUCCIO, *Mondi della logica*, Zanichelli, Bologna 1971, pagg. 46 ss.