Fognano 2004.

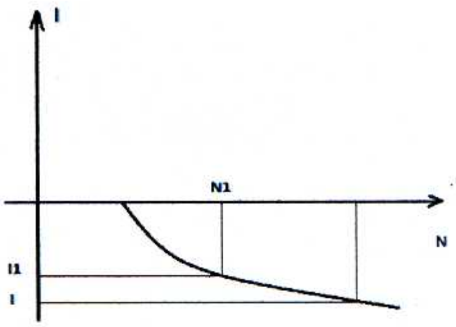
Comunicazione di Alfredo Spadoni sul tema:
Evoluzione dei sistemi complessi.

La complessità è caratterizzata dalla differenziazione, ossia dalla varietà ed eterogeneità delle parti di un sistema e dalle connessioni fra gli elementi stessi.
Le connessioni determinano i vincoli fra le parti distinte e corrispondono al fatto che le parti non sono indipendenti ma interconnesse in una unità d'insieme che si manifesta con comportamenti coordinati.
Le connessioni, i legami, le interazioni, sono da associare alle riduzioni di simmetria, ossia ad un aumento dei vincoli, pertanto ad una crescita di ordine e di informazione.
Più sono i vincoli, meno sono le trasformazioni che lasciano invariato un sistema, maggiore è l'informazione presente nell'organizzazione dello stato. Le rotture di simmetria, determinate da nuovi legami, producono, nel sistema, alternative di stato, ciascuna con un numero minore di modi di essere.
Per chiarire questo punto facciamo riferimento ad una situazione ideale estrema. Immaginiamo un corpo solo nello spazio, dunque senza alcuna interazione.

Gli spostamenti, da luogo a luogo in uno spazio infinito, non cambiano lo stato del sistema. Sono possibili movimenti in tutte direzione senza alterare l'insieme globale, che risulta avere una simmetria sferica. Il corpo può indifferentemente trovarsi in qualsiasi punto dello spazio senza che questa pluralità di posizioni rappresenti modi diversi di essere. Introduciamo ora un piano di interazione attrattiva nello spazio del corpo.

Gli stati equivalenti a quello iniziale diventano solo quelli in cui il corpo occupa le posizioni dei punti di un piano parallelo a quello di attrazione. La simmetria, in questo caso, è piana nel senso che solo le trasformazioni che portano da punti di un piano parallelo a punti dello stesso, lasciano inalterato lo stato del sistema, che dunque ha un minor numero di simmetrie rispetto a quella sferica precedente.
Il corpo, in tale secondo caso, può indifferentemente stare solo nei punti di un piano, mentre nel primo poteva indifferentemente occupare qualsiasi posizione dello spazio.
L'introduzione del piano di attrazione, ossia di un campo attrattivo, ha determinato una rottura di simmetria riducendo il numero delle invarianze.
Così, in generale, se N sono le possibilità per uno stato iniziale, saranno N_1, N_2, ecc., con N_1 ed

N_2.. minori di N, quelle degli stati susseguenti alla rottura di simmetria; i vincoli introdotti hanno fatto diminuire i modi equivalenti di essere.
Ora l'informazione presente in uno stato è, per definizione, proporzionale al logaritmo del numero N dei modi che indifferentemente danno quello stato, ma cambiato di segno.
L'andamento della curva informazione, **I**, in funzione del numero, **N**, dei modi di uno stato è:



Pertanto l'informazione presente nello stato iniziale è **I** = -K.ln(N), mentre quella degli stati emergenti risulta essere $\mathbf{I_1}$= -K.ln(N_1) e $\mathbf{I_2}$= -K.ln(N_2) con $\mathbf{I_1>I}$ e pure $\mathbf{I_2>I}$. Dunque nell'evoluzione verso l'ordine l'informazione cresce. Intendendo, per evoluzione verso l'ordine, il passaggio a stati più ricchi di vincoli e con un numero minore di modi indifferenziati di essere. Questa crescita di informazione ha una valenza semantica in quanto legata ad una trasformazione delle strutture possibili nella nuova simmetria.
La differenziazione conduce al disordine, la connessione all'ordine. La complessità in un sistema è la compresenza di entrambi gli aspetti, l'una fonte possibile di disordine, l'altra potenziale fonte d'ordine. In un sistema complesso esistono dei parametri al variare dei quali il sistema può passare da stati stabili ad una oscillazione fra 2, 4, 8 ecc. stati, per finire nel caos di una pluralità imprevedibile di stati. Dentro le fasi caotiche esistono finestre di oscillazioni fra stati stabili. (Vedi fig. a pag.6).
L'ordine completo si caratterizza per l'esistenza di minima simmetria, ossia minima indifferenza rispetto a qualsiasi trasformazione, mentre il disordine offre massima simmetria. Per simmetria si intende invarianza o indifferenza rispetto a trasformazioni spaziali, temporali, di scala o altro.
Dunque l'evoluzione dei sistemi complessi, quando avviene verso forme sempre più complesse, si caratterizza come una storia che procede verso l'ordine, in direzione di simmetrie decrescenti e di stati con sempre maggiore contenuto di informazione.
Talvolta l'insieme degli stati, che descrivono le evoluzioni possibili per un sistema complesso, viene rappresentato da una superficie che richiama paesaggi collinosi.
Pertanto il paesaggio può essere descritto da un insieme di situazioni alcune stabili, quelle nelle vallate, ed altre instabili, sui vertici delle dorsali. Le situazioni di instabilità offrono una pluralità di possibilità equivalenti, che caratterizza il grado di simmetria della situazione, ossia la pluralità degli stati indistinguibili indifferentemente raggiungibili, e alcune possibilità di novità alternative che insieme determinano le evoluzioni possibili. Se il passaggio ad una nuova situazione comporta una riduzione delle possibilità e delle simmetrie, si parla di rotture di simmetria.
Le connessioni sono interazioni fra le parti differenziate presenti in un dato livello di realtà e sono campi di forze.
Sono le cause delle possibili rotture di simmetria, delle nuove aggregazioni fra gli elementi costituenti il vecchio sistema per fare emergere le forme nuove, con più vincoli, minori indifferenze

rispetto alle possibilità, più contenuto informativo, in breve più ordine.
Il percorso connessioni-informazione segue dunque un linea sintetizzabile in interazione-rottura di simmetria-diminuzione dei modi d'essere nel nuovo stato- più informazione.
La descrizione matematica della complessità non è ancora giunta, per quanto sappia, a dare descrizioni soddisfacenti in ogni caso. Soprattutto a indicare vie percorribili per costruire i modelli necessari nella generalità dei casi. I modelli sono esprimibili mediante sistemi di equazioni le cui soluzioni sono chiamate bacini di attrazione, o semplicemente attrattori. Questi rappresentano i punti fissi, le zone verso cui convergono gli eventi. Vi sono anche soluzioni che si presentano come punti fissi divergenti. Gli attrattori sono le soluzioni delle equazioni matematiche che cercano di fornire un modello della dinamica di un sistema. Alcuni di questi attrattori sono stabili, altri instabili. Nella rappresentazione tramite paesaggi montani delle possibili dinamiche, gli attrattori stabili sono le vallate. Sono fluttuazioni di vario tipo a consentire al sistema di sfuggire da un attrattore e di entrare nel bacino di attrazione di un altro che può rappresentare un nuovo stato *autorganizzato*.
Al passare del tempo la storia può evolvere verso un'organizzazione stabile oppure saltare tra i bacini di vari attrattori diversi. Lo studio delle proprietà di autorganizzazione a partire da un dato livello è equivalente all'indagine sugli attrattori presenti nella dinamica del sistema.
L'autorganizzazione è un moto spontaneo da un attrattore ad un altro generalmente non causato da spinte esterne, è ad esempio sufficiente la presenza di un parametro variabile. La sua essenza è la comparsa di una forma nuova senza altro intervento esterno se non di un semplice flusso di energia e/o informazione in un sistema aperto in condizioni di non equilibrio. Il normale concetto di causa efficiente della scienza non è più sufficiente: per la circolarità delle relazioni nell'autorganizzazione, per l'immaterialità dell'informazione e per la globalità del coinvolgimento delle parti distinte presenti nel sistema. Per rendere conto di ciò è insufficiente la visione analitica, riduzionistica, occorre considerare ciascun elemento del sistema integrato in una rete di relazioni che lo legano a tutti gli altri elementi. Il nuovo schema emergente dall'autorganizzazione è una struttura instabile, che può non permanere se si modificano i parametri da cui dipende la dinamica del sistema.
Sono i valori di questi parametri a spingere il sistema verso attrattori stabili o no, verso l'ordine o sulla soglia del caos, ma anche a condurre in situazioni imprevedibilmente caotiche. E' proprio la soglia del caos a fare emergere, per via delle fluttuazioni, novità sorprendenti e strutture imprevedibili.
I sistemi complessi sono caratterizzati anche da un comportamento qualitativamente diverso dalla semplice stabilità e dal caos, possono trovarsi ai margini del caos. Il che non significa che siano in balia della casualità e dell'anarchia, ma che il nuovo emergente è l'espressione di un *ordine implicito*.
Questo richiama l'*ordine gratuito,* come altra fonte d'ordine oltre la selezione naturale, sostenuto da Kauffman nel libro "*A casa nell'universo*".
Un sistema complesso è un sistema aperto i cui numerosi elementi interagiscono in modo non lineare e costituiscono una unità organizzata e dinamica in grado di evolvere e adattarsi all'ambiente. Un sistema complesso interagisce con altri che insieme costituiscono l'ambiente.
Questa dinamica non lineare comporta una nuova concezione di causalità, con feedback positivi ma anche con elementi di globalità e unità che richiamano la non località quantistica.
Dunque nella zona intermedia, fra ordine e caos, la dinamica del sistema può venir pilotata sia tramite modifiche dei parametri di controllo sollecitate dalla pressione ambientale, sia attraverso fluttuazioni indipendenti dall'esterno ma condizionate dai vincoli imposti dalle leggi, il cosiddetto ordine implicito. La complessità di questa dinamica si manifesta come rottura di uno stato a seguito di una instabilità interna o di un'azione dall'esterno e con l'assestarsi finale in un nuovo stato qualitativamente diverso.

Il seguito della comunicazione è nuovo rispetto a quanto detto nel 2003.
Poiché le definizioni verbali lasciano margini di vaghezza, cercherò una specie di definizione operativa di sistema complesso, presentando degli indicatori matematici di complessità.
Allo scopo mi propongo di precisare i concetti di instabilità e di dinamica complessa per un sistema.

Instabilità dinamica.

Per dare alla definizione di instabilità un riferimento concreto che ne faciliti la comprensione, prenderò dapprima in esame un sistema generalmente ben conosciuto.

Sia il sistema Terra-Sole, considerato isolato, come se non subisse altri influssi oltre al legame gravitazionale fra i due corpi.

Le leggi della meccanica e della gravitazione di Newton ne consentono un **modello**, formato da equazioni differenziali lineari, che lo descrivono stabile nel tempo anche per periodi molto lunghi.

Se indichiamo con **r(t)** la distanza della terra dal sole in funzione del tempo, le leggi consentono di scrivere l'equazione:

$$\mathbf{d^2 r/dt^2 = F(r,t)/m} \qquad (1)$$

dove il primo membro, rappresentante l'accelerazione con cui cambia la distanza terra-sole, viene fatto dipendere da una funzione della distanza e del tempo che sappiamo essere:

$$\mathbf{F(r,t) = G.M.m/r^2(t)},$$

M,m sono le masse del sole e della terra e **G** una costante universale.

La soluzione stabile della (1), che indicheremo con **R(t)**, rappresenta ellissi col sole in uno dei fuochi.

La considerazione del sistema Terra-Sole sopra descritta, che prende in esame i due corpi isolati da tutto il resto, è una approssimazione non realistica. Il sistema è perturbato da influenze esterne, trascurabili solo ad un primo approccio. Sulla terra, oltre al sole, agiscono, ad esempio, Marte, Giove e in generale almeno tutti i corpi del sistema solare, per cui, nel modello, dobbiamo aggiungere delle forze supplementari in base ai corpi che intendiamo introdurre nel sistema per migliorarlo. Ciò comporta modifiche dipendenti dal numero, **n**, di corpi presi in esame. Dunque al cambiare di **n** si hanno soluzioni diverse del modello, che indicherò con $\mathbf{r_n(t)}$.

Il problema è quello di individuare il punto in cui le soluzioni $\mathbf{r_n(t)}$ giungono, se vi giungono, ad un punto critico, di instabilità dinamica.

Consideriamo le differenze, in valore assoluto, ossia a prescindere dal segno, fra le distanze terrasole perturbate dai corpi considerati e quelle imperturbate; poniamo:

$\mathbf{y_n(t) = \mid r_n(t) - R(t) \mid}$.

Le $\mathbf{r_n(t)}$ descrivono le traiettorie perturbate della terra attorno al sole e le $\mathbf{y_n}$ esprimono le variazioni nel tempo delle loro differenze da quelle imperturbate.

Se il limite di $\mathbf{y_n}$ per **t** tendente all'infinito è **0,** in formule se :

$$\mathbf{\lim_{t \to \infty} y_n(t) = 0} \qquad (2)$$

si dice che il sistema è asintoticamente stabile.

Questo significa che, in tal caso, le perturbazioni tendono a diventare trascurabili rispetto all'orbita stabile della terra.

Se però il limite (2) non è zero, le perturbazioni rendono il sistema instabile e l'orbita terrestre potrebbe nel tempo allontanarsi da quella imperturbata.

Questa $\mathbf{y_n}$ fornisce dunque uno strumento per determinare la stabilità di un sistema e ,aggiungendo qualche elaborazione matematica, per quantificare il grado di tale stabilità.

Allo scopo si è definito quanto rapidamente la $\mathbf{r_n(t)}$ perturbata si allontana dalla **R(t)**, assumendo per la $\mathbf{y_n}$ una velocità di cambiamento, $\mathbf{dy_n/dt}$, lineare con $\mathbf{y_n}$, in formule:

$$\mathbf{dy_n/dt = \lambda_n.y_n} \qquad (3).$$

L'ipotesi fatta definisce anche l'esponente $\mathbf{\lambda_n}$, di Lyapunov, che risulta :

$$\mathbf{\lambda_n = (1/y_n).dy_n/dt} \qquad (4)$$

e rappresenta la velocità di allontanamento unitario del raggio perturbato.

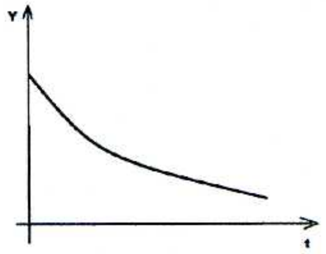
La (3) comporta che risulti:

$$\mathbf{y_n = y_0.exp(\lambda_n.t)} \qquad (5)$$

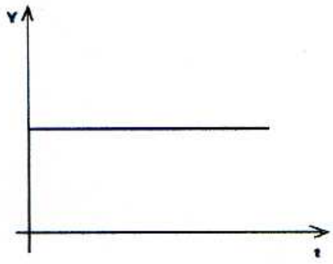
dove $\mathbf{y_0}$ è la differenza iniziale fra le distanze perturbate e non perturbate.

Se rappresentiamo graficamente l'equazione esponenziale (5), si presentano tre casi distinti a seconda che sia $\mathbf{\lambda_n}$ minore, uguale o maggiore di **0**.

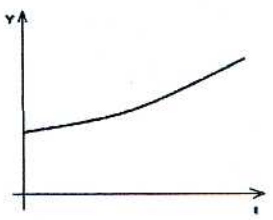
Con $\mathbf{\lambda_n < 0}$ è:



dunque y_n per t tendente all'infinito tende a zero. Si ha pertanto stabilità asintotica.
Se $\lambda_n = 0$ si ha:



ossia l'orbita perturbata ha distanza costante da quella imperturbata,siamo ancora in uno stato di stabilità.
Quando $\lambda_n > 0$ l'andamento della curva si presenta crescente:



questo significa che le orbite divergono esponenzialmente da quella stabile e si ha il caos deterministico. Dunque gli esponenti di Lyapunov, come definiti dalla (4), ci danno lo strumento per definire la stabilità e il suo grado. Con λ_n minore o uguale a zero si ha stabilità asintotica o non asintotica, mentre con λ_n maggiore di zero non c'è stabilità ma caos deterministico, ossia imprevedibilità delle possibili evoluzioni del sistema.
Quanto detto sin qui vale non solo per il sistema solare ma anche per qualsiasi sistema per il quale si abbia un modello matematico. Le $\mathbf{r}_n(t)$ e la $\mathbf{R}(t)$ non sono necessariamente delle posizioni, possono rappresentare qualsiasi variabile che sia ritenuta utile per descrivere gli stati del sistema in esame.
Inoltre la y_0, invece di essere interpretata come differenza delle posizioni iniziali, perturbate e non, può intendersi come l'incertezza della variabile al tempo zero.
In tal caso y_0 diventa l'imprecisione di R_0.
Ossia noi conosciamo R_0 solo come valore dentro un intervallo: $R_0 - y_0 < R_0 < R_0 + y_0$.
In questa interpretazione l'esponente λ_n informa sulla stabilità o meno a seconda della precisione con cui conosciamo la situazione iniziale. Quando $\lambda_n > 0$ può aversi l'effetto farfalla. Ossia la descrizione del sistema è attendibile per tempi brevi ma non a lungo termine, perché le piccole differenze nei dati iniziali, piccole come può essere il battito d'ali di una farfalla fra i dati relativi allo stato iniziale dell'atmosfera terrestre, possono determinare dinamiche completamente diverse, fra quiete e tempesta.
Dunque $\lambda_n > 0$ è associata ad imprevedibilità a lungo termine.

La (5) può consentirci di prevedere il tempo richiesto perché l'allontanamento dalla condizione imperturbata, o stabile, raggiunga un determinato valore. Così se vogliamo sapere dopo quanto tempo, presumibilmente, avremo una divaricazione σ dai valori stabili, basta porre in (5) σ al posto di $\mathbf{y_n}$ e risolvere rispetto al tempo per ottenere la previsione richiesta. Si ottiene:

$$\mathbf{t = 1/\lambda_n . ln(\sigma/y_0)} \qquad (6).$$

La (6) consente,ad esempio, di determinare per quanti secoli presumibilmente la terra manterrà stabilmente, ossia con deviazioni contenute entro limiti stabiliti, la propria orbita attorno al sole, in un modello sufficientemente completo delle influenze dei corpi del sistema solare sul suo moto. Dopo quel tempo si raggiungerà uno stato critico, di instabilità, che può evolvere in situazioni catastrofiche.

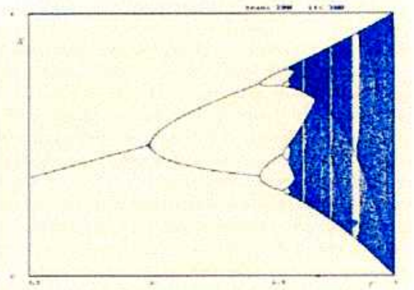
In generale essa dice che il tempo per il quale le previsioni sono attendibili dipende da tre fattori: l'entità dell'errore che siamo disposti a tollerare, δ ; la precisione delle misure che definiscono lo stato iniziale, $\mathbf{y_0}$ e una scala temporale, stabilita da λ , dipendente solo dalla dinamica interna del sistema caotico.

Riassumendo si può dire che, quando siamo in grado di costruire un modello matematico di un sistema, gli esponenti di Lyapunov, calcolabili con la (4), e la formula (6), informano sul suo grado di stabilità e sui tempi di tale condizione di stato.

Quando la stabilità finisce e si giunge ad un punto critico, si può avere una autorganizzazione oscillante fra più possibilità o una fase caotica. Ma i modi e i tempi di questi passaggi nōn dipendono solo dal tempo ma anche dai valori dei parametri che nell'equazione (1) figurano come costanti a fianco delle variabili. Nel caso del sistema Terra-Sole le variabili sono **r** e **t**, le costanti **G**, **M**, **m**. In generale le costanti, nel ruolo di parametri, determinano i modi del passaggio dalla stabilità al caos e viceversa. Ossia a parità di altre condizioni, sono i valori dei parametri, soggetti a fluttuazioni, a caratterizzare la dinamica del sistema. Nei casi in cui, dalla stabilità, si passa ad una oscillazione fra due stati diversi, a seguito di una piccola variazione dei parametri, si dice che si è avuta una rottura di simmetria.

Si pensa, ad esempio, che il nostro universo, nella sua storia, abbia subito tre rotture di simmetria, almeno per quanto riguarda il modello che mira a descrivere le forze operanti nel sistema. Da una forza originariamente unica, raggiunti certi valori dei parametri, legati a variazioni di temperatura e densità della materia, si sarebbe entrati in una situazione critica, instabile e determinata una biforcazione che avrebbe generato la forza gravitazionale e una forza che diciamo unificata.

Questa ultima a seguito di nuovi valori della temperatura e della densità, dovuti all'espansione cosmica, si sarebbe ulteriormente divisa in forza elettrodebole e forza forte. Un'ultima rottura di simmetria, a seguito di nuovi valori dei parametri, avrebbe determinato le forze elettromagnetica e debole. Per cui oggi il quadro complessivo delle forze nel nostro universo è costruito da quattro tipi di forze: gravitazionali, elettromagnetiche, nucleari deboli e forti. Lo schema delle rotture di simmetria è rappresentabile come segue:



In generale, al cambiare dei valori dei parametri, le oscillazioni fra alternative possono crescere da 2 a 4, da 4 a 8 e diventare infine così numerose da non avere più una oscillazione periodica fra un numero limitato di possibilità. In tal caso non si è più in grado di sapere quale sarà lo stato successivo e di fare previsioni sulla evoluzione futura. (Vedi in fig. sopra a destra un esempio che mostra, al variare di un parametro, posto sull'asse orizzontale, il valore o i valori che può assumere lo stato di un sistema). Prima di questa fase di caos, la prevedibilità è ancora possibile ma poi non più, almeno sin quando i parametri non abbiano raggiunto un intervallo di valori dove le alternative ridiventano un numero finito. Questo perché le zone di caos e di ordine o prevedibilità, si alternano secondo un andamento determinato. Comunque, a parte il cambiamento dei valori dei parametri, niente altro è avvenuto nel sistema, la cui dinamica rimane descritta dallo stesso modello matematico, dunque dalle medesime variabili e dalle relazioni relative. Il sistema, senza interventi esterni, giunto in una fase critica, si autorganizza oscillando prima fra alternative periodiche qualitativamente nuove, per passare poi a stati caotici e ad una pluralità di possibilità non più prevedibili. Il sistema sceglie autonomamente come organizzarsi, costruendo le proprie configurazioni in funzione dei valori dei parametri. Questi processi di autorganizzazione possono essere visti in analogia con le transizione di fase della fisica, ossia con quei particolari fenomeni che si presentano in corrispondenza di condizioni di instabilità, il cui attraversamento conduce ad una riorganizzazione degli elementi del sistema. Si tratta, ad esempio, dei cambiamenti di stato della materia che avvengono in corrispondenza di piccole variazioni di temperatura in prossimità di determinati valori critici. Un liquido solidifica quando la temperatura scende sotto un preciso valore e le molecole passano da uno stato fluido, senza alcuna particolare organizzazione, ad uno stato solido cristallino ordinato in una precisa disposizione spaziale. Così si interpreta anche l'evoluzione del nostro universo che, dopo il Big Bang, raffreddandosi, in seguito all'espansione, ha raggiunto temperature tali da autorganizzarsi con due forze invece di una, per passare poi a tre e infine a quattro come abbiamo visto sopra.

Per concludere il discorso sulla stabilità e il caos deterministico, si può dire che gli esponenti di Lyapunov consentono una definizione di stabilità, una sua classificazione in gradi e l'individuazione del punto di passaggio ad una instabilità dinamica.

Per qualsiasi sistema, più o meno ricco di elementi costitutivi, di cui si sia in grado di costruire un modello matematico, è sempre necessario fare delle scelte. Queste implicano di trascurare elementi ritenuti, in prima approssimazione, poco importanti per la dinamica complessiva.

Successivamente si può ampliare il modello semplificato con elementi perturbanti che ne arricchiscano la descrizione. Da ciò la possibilità, risolvendo le equazioni dei due modelli, di procurarsi le differenze fra le soluzioni perturbate e quella stabile. Così, utilizzando la formula (4), si possono calcolare gli esponenti, λ ,di Lyapunov associati alla velocità relativa di allontanamento della descrizione perturbata da quella che non lo è. Se i λ sono negativi o nulli si ha stabilità, indipendenza dalle condizioni iniziali, poiché comunque il sistema tende alla condizione stabile dello stato imperturbato o alla oscillazione fra stati determinati. Se i λ sono positivi la perturbazione si amplifica esponenzialmente, il sistema entra in un ambito di caos, in cui non è prevedibile alcun esito futuro per gli stati del sistema.

Il discorso, sin qui svolto, sulla stabilità o meno, sul caos deterministico e la sua comparsa, può sembrare esclusivamente interno alla trattazione matematica. Ma non è così. Il caos riscontrato nei modelli trova corrispondenza nei processi evolutivi reali.

Inoltre si sono elaborati metodi per determinare gli esponenti di Lyapunov anche in mancanza di un modello matematico.

Si parte da serie storiche di misure sulle variabili assunte a descrizione degli stati di un sistema. Si scelgono,nella stessa serie storica, due stati A e B poco lontani fra loro e si utilizzano gli scarti fra i valori delle variabili che li definiscono per calcolare gli esponenti di Lyapunov e la loro evoluzione nel tempo. Ciò permette di stabilire se la dinamica del sistema è regolata da una legge deterministica con evoluzione stabile o caotica oppure se è stocastica, cioè regolata dal caso. I metodi di Lyapunov hanno in tal modo un'ampia applicabilità.

L'esperienza ha anche consentito di riconoscere che l'organizzazione critica, fra stabilità e disordine, è in natura molto frequente.

Bibliografia.

1- C.S Bertuglia, F. Vaio, *Non linearità,caos,complessità,* Boringhieri 2003.

2- M. Buchanan, *Ubiquità,* Mondatori 2000.

3- F. Cramer, *Caos e ordine,* Bollati Boringhieri 1994.