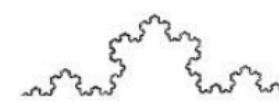


Breve resoconto dell'Incontro Interdisciplinare del 24 novembre 2025

a cura di fra Sergio Parenti O.P.

JULVE - Un frattale è un oggetto geometrico dotato di autosomiglianza interna, cioè che si ripete nella sua forma, esattamente o con alcune variazioni, su scale diverse, e dunque ingrandendo una qualunque sua parte si ottiene una figura simile all'originale. I frattali sono di natura astratta puramente matematica e come tali si possono realizzare in una, due o più dimensioni.

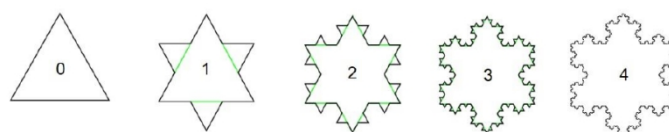
La curva o merletto di Koch è un tipo di frattale esattamente auto-simile, creato mediante un processo iterativo che parte da un segmento di lunghezza l , lo divide in tre parti uguali, rimuove il segmento centrale e lo sostituisce con due segmenti della stessa lunghezza formando una punta, e l'operazione viene ripetuta in ogni segmento rettilineo risultante infinite volte:

iterazione	Curva di Koch	lunghezza
0		l
1		$\frac{4}{3} l$
2		$\left(\frac{4}{3}\right)^2 l$
3		$\left(\frac{4}{3}\right)^3 l$
4		$\left(\frac{4}{3}\right)^4 l$

La distanza l tra gli estremi del segmento (e la distanza “in linea d’aria” tra due punti qualsiasi in essa) è finita, mentre la lunghezza lungo il percorso cresce fino all’infinito con le iterazioni.

Con un numero finito di iterazioni, la pendenza della linea è definita in ogni piccolo tratto rettilineo ma fa salti bruschi nelle cuspidi, dove non è definita. Dopo infinite iterazioni è chiaro che la pendenza non è definita.

Disponendo il
segmento di
partenza a formare i
lati di un triangolo
equilatero, il



processo porta alla più suggestiva figura del “fiocco di neve di Koch”, che riserva altre sorprese:

mentre, come visto prima, la lunghezza del bordo tende a infinito, con le iterazioni la superficie racchiusa resta finita e tende a $8/5$ quella del triangolo di partenza.

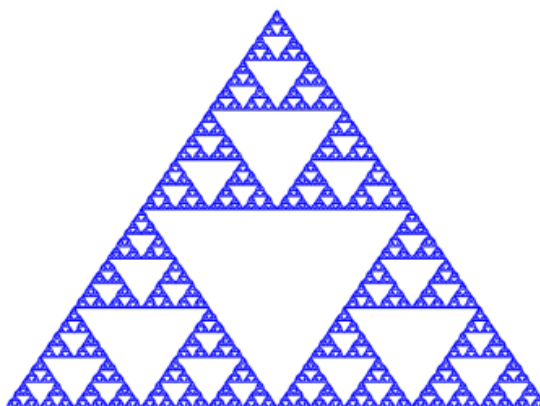
Il fatto che la distanza misurata lungo il percorso tra due punti della curva di Koch sia infinita rompe il rapporto abituale tra dimensione di uno spazio e il numero di parametri (cioè coordinate) richiesti per fissare la posizione di un punto: normalmente in una dimensione (una linea retta, o anche curva ma “non troppo” sinuosa) la distanza al punto lungo la linea fornisce questo parametro, in una superficie (“non troppo” rugosa) bastano due coordinate, ecc. Un punto ha dimensione zero. Per trattare insieme frattali quali la curva di Koch si usa la definizione di “dimensione di Hausdorff”, per la quale un punto ha sempre dimensione 0, una linea ha dimensione 1, una superficie ha dimensione 2, un volume ne ha 3, ecc, ma per la curva di Koch la dimensione di Hausdorff risulta $(\ln 4)/(\ln 3) = 1,26$, quindi una via di mezzo tra una linea e una superficie, ed è indice della sua “frattalità”.

Un esempio più elementare è la curva di Cantor, che si ottiene dividendo ancora un segmento di linea in tre parti e semplicemente togliendo quella centrale. Poi si ripete la procedura con i segmenti rimasti, e così via:

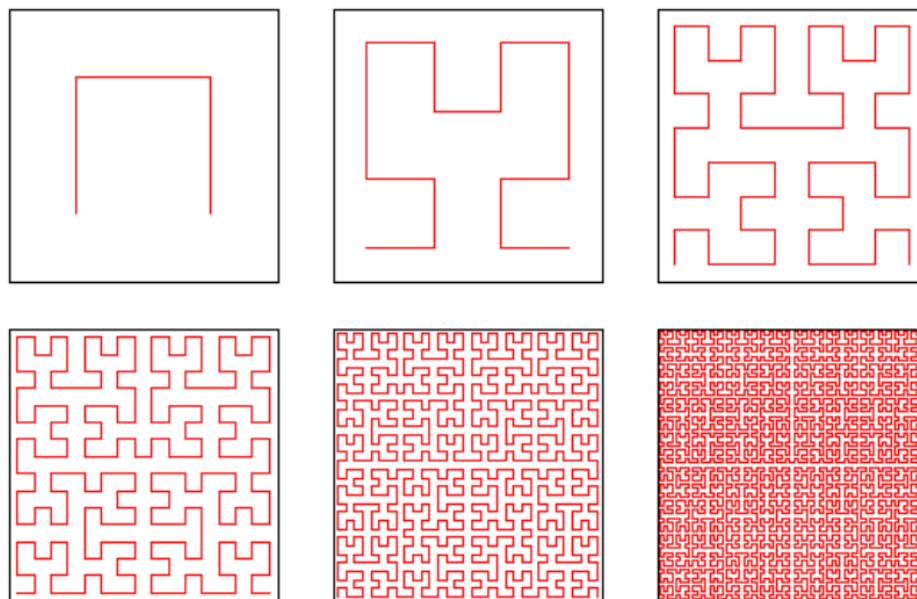


La “curva” risultante, detta anche “polvere di Cantor”, è non continua e altamente non connessa (“connesso” significa che si può andare da un punto all’altro senza mai lasciare l’insieme: In questo senso l’Italia non è un territorio connesso perché ha delle parti non raggiungibili a piedi, le isole, mentre l’Austria lo è), e ha dimensione di Hausdorff $(\ln 2)/\ln(3) = 0,63$.

In due dimensioni proliferano gli esempi di oggetti frattali, quali il triangolo di Sierpiński, ottenuto sottraendo alla superficie di un triangolo quella del triangolo inscritto come nella figura, poi la stessa operazione va ripetuta nei tre triangoli risultanti, e così successivamente:



Altri oggetti frattali sono le curve di riempimento (space-filling) di uno spazio, cioè curve continue che riescono a passare arbitrariamente vicino a ogni punto di detto spazio, e devono per forza essere frattali. Ecco le sei prime iterazioni della curva di Hilbert:



Questa “curva” parte da un punto in basso a sinistra per finire nell’omologo in basso a destra all’interno di un quadrato di lato L prendendo il punto di partenza a una distanza $L/4$ dai lati più vicini. Per generarla si seguono più tratti rettilinei in maniera che nessun punto all’interno del quadrato rimanga a una distanza superiore a $L/4$ dalla curva. Poi si riduce successivamente questa distanza a valori sempre più piccoli $L/8$, $L/16$, ecc. in una successione infinita. Non a caso la dimensione di Hausdorff della curva di Hilbert è 2 per questa proprietà di riempimento di uno spazio bidimensionale.

Questi sono oggetti costruiti a tavolino. Ma ci sono altri oggetti nei quali ci siamo imbattuti senza sapere che ci fosse una struttura di frattale: l’insieme di Mandelbrot, imparentato con la famiglia degli insiemi di Julia.

L’insieme di Mandelbrot dipende da una formuletta in termini di numeri complessi. Chi volesse avere una introduzione ai numeri complessi può consultare:

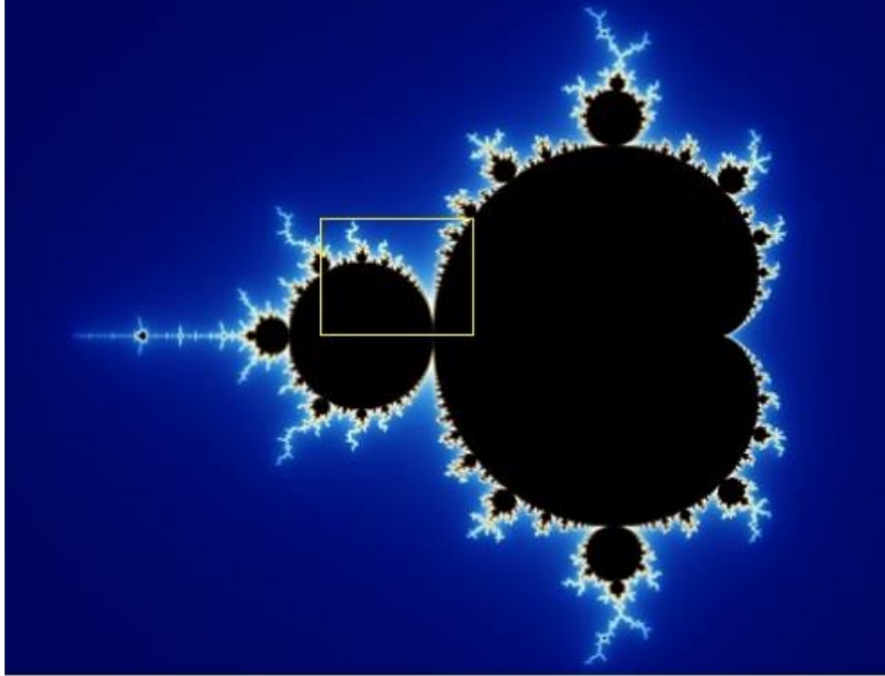
<https://csdricerca.domenicani.it/interd2122/MQ-Interdiscipl.pdf>

La formula è:

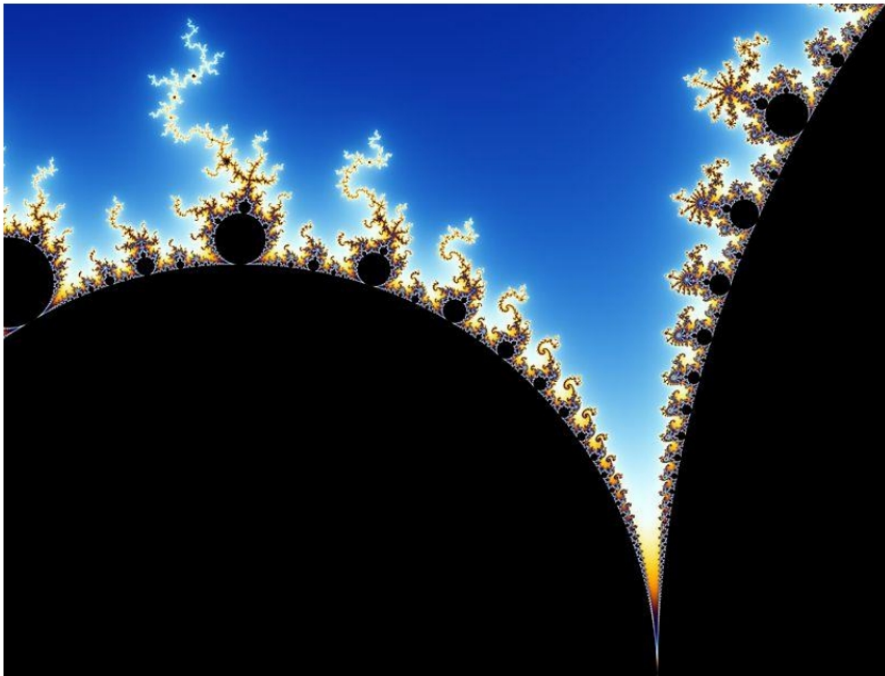
$$Z_{n+1} = Z_n^2 + C$$

dove Z_0 e C sono due numeri complessi e l’indice n prende i valori crescenti 1, 2, 3 ... I numeri successivi Z_n che si ottengono possono essere lontani o vicini a Z_0 nel piano complesso (ogni numero complesso può essere rappresentato su un piano, che viene detto “complesso”). La proprietà che si studia è se, dipendendo dai Z_0 e C scelti, la successione sia limitata, cioè se Z_n rimanga entro un cerchio di raggio finito col crescere di n , o invece si allontanano sempre più dall’origine delle coordinate. Col computer si crea la successione (a mano non ci riusciremmo) e la sorpresa è stata di trovare un mondo di frattali dalla complessità infinita: applicando l’ingrandimento ci troviamo

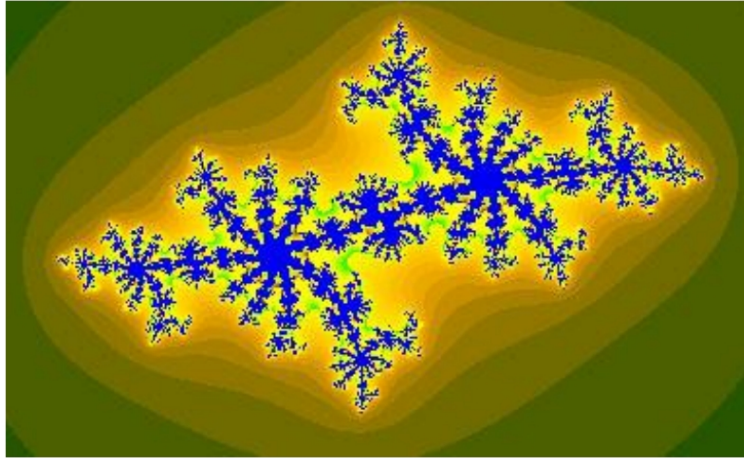
davanti delle ripetizioni della stessa figura, ma non esattamente uguale. Il computer permette inoltre di dare colori diversi invece di avere un disegno solo nero. L'insieme di Mandelbrot si definisce come l'insieme dei valori di C per i quali, partendo da $Z_0 = 0$, la successione è limitata. La sua estrema frattalità è testimoniata dalla sua dimensione di Hausdorff, che vale 2 come quella di una superficie.



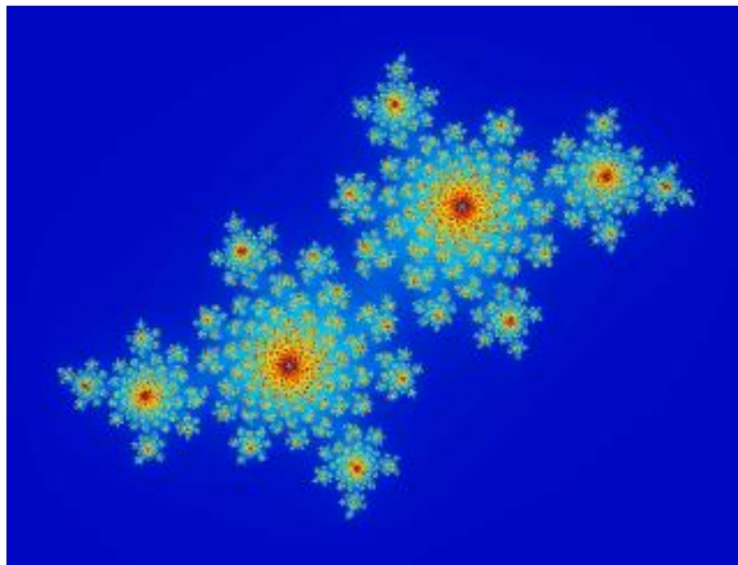
Il riquadro ingrandito mostra il ripetersi di strutture simili:



Per ogni valore di C si ha un insieme di Julia, definito come l'insieme dei valori di Z_0 per i quali la successione è limitata. Se C appartiene all'insieme di Mandelbrot allora l'insieme di Julia è connesso, come nell'esempio seguente:



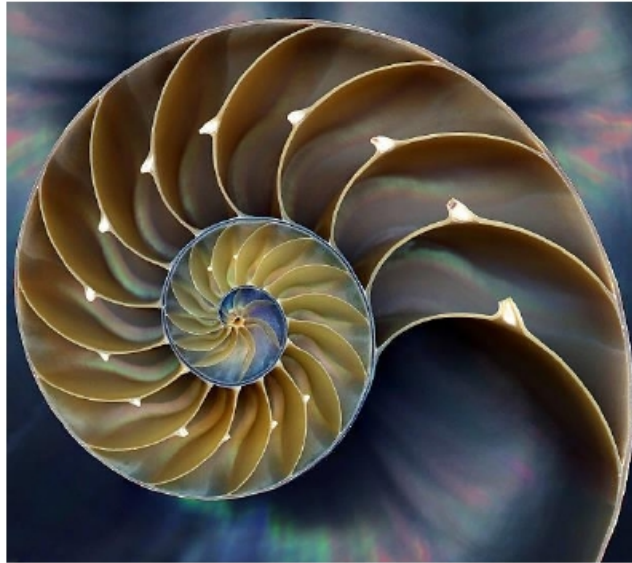
Se C è fuori dall'insieme di Mandelbrot allora l'insieme di Julia non è connesso, cioè consta di infinite isole, come per esempio:



Ci sono poi esempi in natura (la prof. Grassi ci ha mandato alcuni esempi relativi al corpo umano). Ad esempio il broccolo romano:



Oppure la chiocciola:



Anche le coste frastagliate mostrano disegni simili, e del resto anche noi, quando facciamo in una strada dei tornanti per superare un dislivello, ripetiamo disegni simili.



In natura però il processo si ferma. C'è un limite imposto dalla natura: un conto è la matematica dove puoi andare avanti col calcolo in un mondo di enti di ragione, in realtà è diverso. C'è una domanda che i frattali ci pongono: se certi oggetti matematici vengono scoperti e non costruiti da noi, qual è la loro realtà?

Un altro punto riguarda la questione dell'infinito. Che cosa vuol dire infinito in matematica? Abbiamo parlato di iterazioni all'infinito. Vuol dire: “tante volte quante voglio”, senza un limite concettuale. Andando verso il piccolo, come nelle curve di riempimento di una superficie (quella di

Hilbert, ad esempio) questo significa: è capace di avvicinarsi finché vogliamo ad ogni punto della superficie.

Padre Bertuzzi ci parlava di Kant. C'è poi la questione di “infinito in potenza” e “infinito in atto”. Prendiamo la curva di Koch o l'insieme di Mandelbrot: possiamo affidarli ad un computer, ma non possiamo andare avanti all'infinito e non puoi avere un numero infinito di decimali, ma devi accontentarti di una approssimazione. Le operazioni numeriche, nella realtà, hanno limiti pratici.

Per restare nella realtà, prendiamo per esempio la distanza. Che cos'è? Come un peso o una superficie è qualcosa che si addice ad oggetti esistenti. Parlare di infinito significherebbe parlare di infinito esistente nel reale, in atto, non di infinito potenziale come possibilità. Parlare di infinito nella realtà è una sfida che lancia ai filosofi.

Ultimo punto: prendiamo gli insiemi di tipo Mandelbrot (non quelli inventati da noi a tavolino). La frattalità sta nella frontiera tra bianco e nero: per quanto ingrandiamo resta sempre complicatissima.

Per vedere com'è fatta questa frontiera, dobbiamo affrontare due tipi di procedure infinite. Per vedere se un punto è dentro o fuori dell'insieme di Mandelbrot, dobbiamo fare molte iterazioni della formula. I punti diventano sempre più fitti e abbiamo ulteriori infiniti. Dunque rimane un oggetto ideale al quale ci avviciniamo finché vogliamo, ma il limite rimane al di là di ogni possibilità di realizzazione pratica. Ma per imbatteci in questi problemi di oggetto matematico da realizzare in concreto non c'è bisogno di andare così lontano: basta pensare a π . La lunghezza del cerchio è due volte la lunghezza del raggio moltiplicata per 3,14... ma il numero prosegue, e ci sono diverse formule matematiche per dire come si calcola π . Una, per esempio, è dovuta a Leibniz e Gregory: è la serie alternata: $\pi = 4 - 4/3 + 4/5 - 4/7 + 4/9 \dots$. Un computer può fare molto di più di uno con carta e matita, ma in entrambi i casi π resta un ideale, un limite irraggiungibile, ma che esiste, cui si tende. Platone diceva per questo che gli oggetti matematici esistono, ma non in questo mondo.

ARISTEI - La natura realizza se stessa nella maniera non “infinita”, ma, più probabilmente, “economica”: per ottimizzare qualcosa.

JULVE - Ci sono tanti altri numeri “magici” in matematica, ho usato π perché è noto a tutti. Ho fatto delle provocazioni ai filosofi: infinito o non limitato, l'universo? Ideale, concettuale, potenziale o in atto? In atto vuol dire realizzabile in natura?

PARENTI - “Realizzabile” non è “realizzato”. “In atto” vuol dire realizzato. Aristotele dice che tutti ammettono che nel divenire, nelle trasformazioni, deve esserci una contrarietà. Persino Parmenide ammetteva che, almeno nell'apparenza, la contrarietà ci fosse. Come possono allora coesistere realtà infinite contrarie? Non riusciamo ad immaginare una grandezza infinita, però qualcosa di sempre più grande sì, come i numeri, dove posso sempre averne uno successivo più grande. Posso dire che dal punto di vista della grandezza, della quantità, l'insieme dei numeri naturali è infinito attualmente. Però non c'entra la distinzione di infinito in potenza o in atto in quanto esistente. Aristotele critica Platone che per infinito intende ciò cui non manca nulla.

ARISTEI - Il mio concetto di infinito non ha confini con un altro infinito: non possono coesistere due infiniti.

JULVE - Il paradosso di Olbers: se ci fossero infinite stelle il cielo sarebbe incandescente. Però l'universo visibile è in espansione e le stelle più lontane ci mandano una luce indebolita: per questo il cielo è nero.

PARENTI - Ma l'infinito non è un numero. Un infinito di piccolissimi è grande come un infinito di grandi. Credo sia meglio dire che usiamo delle parole cercando di dar loro un significato che forse non hanno. Sarebbe meglio interrogarci sul significato.

JULVE - Il matematico cerca di evitare questo pantano concettuale dicendo: serie o insieme di numeri grande a piacere: un numero arbitrariamente alto.

FRATTINI - In matematica l'infinito viene usato praticamente come un numero molto grande.

JULVE - Un segmento di retta ha infiniti punti. Così il lato di un quadrato. Ma posso mettere in corrispondenza biunivoca i punti di un lato ed i punti interni al quadrato? Allora si parla di cardinalità.

FRATTINI - Un segmento piccolo a piacere ha sempre infiniti punti, e si può metterli in corrispondenza biunivoca con quelli di una linea lunghissima.

PARENTI - Possiamo domandarci se l'infinito sia ciò cui puoi sempre aggiungere qualcosa oppure sia ciò che è talmente grande che non puoi aggiungere qualcosa che non abbia già. Sono due concezioni diverse. Posso considerare gli insiemi di punti, oppure dire che esiste ciò che ha grandezza, come un segmento, ed il punto è solo dove finisce un segmento e ne inizia un altro. In questo caso l'infinito lo trovo nella divisione di ciò che è divisibile in parti a loro volta divisibili (che è il continuo di Aristotele). L'atomo esiste per Aristotele, ma non in forza della grandezza, che resta divisibile all'infinito, ma in forza delle realtà naturali che, per esistere, hanno però sempre dimensioni minime e massime. A Zenone Aristotele obiettava che io non ho in atto infiniti segmenti da percorrere per poter arrivare al termine. Platone invece voleva dare una realtà alle idee.

JULVE - Non basta dire che Achille deve prima percorrere la metà, e prima ancora la metà della metà ... Si deve anche dire che Achille impiega tempi sempre più piccoli a percorrere i tratti sempre più piccoli. E la serie è facile da sommare e ci dice in quanto tempo Achille raggiunge la tartaruga.

PARENTI - Una trasformazione è uno stato ancora incompleto di chi è in trasformazione. Questo permette di distinguere termini parziali e misurare una grandezza. La misura la faccio io, ma la grandezza non dipende da me. Così posso studiare le proprietà di una sfera prescindendo da ciò di cui la palla è fatta, anche se un materiale ci sarà comunque. Questo non autorizza a dare realtà a ciò che dipende dal mio astrarre, che cioè dipende dal mio modo di conoscere, quasi dovesse essere reale nello stesso senso in cui considero reale la palla. Il fatto che un ente "di ragione" abbia fondamento nella realtà non mi autorizza ad attribuirgli realtà come l'ha il fondamento. Anassagora, poiché si potevano mettere in corrispondenza i punti di un piccolo segmento con quelli di una linea lunghissima, pensò che gli atomi fossero come i punti ed in ogni punto potessero esserci infiniti atomi di tutte le specie (omeomerie) e con l'emergere di atomi di una certa specie spiegava le trasformazioni: così diceva il prof. Ettore Carruccio.

Si parla di "frattali" perché avrebbero una dimensione frazionaria, ad esempio tra una e due?

FRATTINI - “Frattale” perché utilizza una parte della entità di inizio, ad esempio di un segmento, e poi passa alla parte della parte e così via. A noi sfugge l'utilità dei frattali, ma in futuro ne vedremo delle belle.

BERTUZZI - Mi interessa il problema della corrispondenza tra un oggetto che costruiamo con la nostra intelligenza, come la matematica o la geometria, e la realtà. Noi diciamo che una circonferenza non corrisponde mai esattamente ad un oggetto rotondo: avviene così anche per i frattali?

FRATTINI - Un esempio molto elementare è come nascono i rami in un albero. Nei pini alla base abbiamo i primi rami. Poi abbiamo il secondo “castello”. Il terzo è sempre una frazione del primo. Lo stesso avviene nel fatto che i rami alla base sono radi, poi si infittiscono: le distanze seguono una frattalità.

JULVE - Ma non vanno all'infinito.

PARENTI - Nelle antinomie di Kant si diceva che se il mondo esiste da sempre, dovrebbe aver percorso una distanza infinita per arrivare ad oggi, e questo non pare possibile. Questo argomento era noto già nell'antichità. San Tommaso diceva che l'argomento non teneva perché quello era un infinito in cui ogni elemento era finito: non esiste una misura di distanza che sia infinita (così come ogni numero naturale è finito, anche se i numeri sono infiniti nel senso che non c'è un ultimo numero). Aristotele guardava le grandezze che, prescindendo da questa o quella natura, hanno una misura sempre divisibile: questo per via dell'astrazione con cui le consideriamo. Kant guardava i punti, che in quanto termini di una grandezza sono indivisibili. Per Aristotele i numeri nascono dalla divisibilità della grandezza e dipendono dal nostro misurare. Così una trasformazione che riguarda solo una misura, come il moto locale, è continua e divisibile all'infinito. Le altre trasformazioni non è detto che in natura possano essere divisibili all'infinito. Per questo ammetteva l'atomo. I punti, se si toccano sono un punto solo; se invece sono distinti devono essere gli estremi di una grandezza che, per quanto piccola, è a sua volta divisibile all'infinito, ma solo dal punto di vista astratto della sua misura. Oggi abbiamo tolto la quantità come oggetto della matematica, sostituendola con gli insiemi (consideriamo la grandezza quasi un luogo di un insieme di punti): questo crea altri problemi quando si pensa ad infinità di infinità di elementi.

BERTUZZI - Perché nelle cause non si può andare all'infinito?

PARENTI - Un motivo è che la definizione, che dovrebbe comprendere le cause, diventa infinita ed incomprensibile. In realtà se esistono cause dipendenti nel loro causare, occorre una causa “prima”, indipendente nel causare, altrimenti le cause dipendenti non causano, non importa che siano una, molte o infinite. Una notizia vale perché qualcuno è stato testimone oculare e poi ha riferito ad altri che a loro volta hanno riferito ad altri. Dire che si può andare all'infinito significa che tutti riferiscono per sentito dire e non c'è alcun testimone oculare.