

Espansione in spazi finiti ed infiniti

J. Julve. Incontro interdisciplinare 27-04-2026

Presupposti filosofici

Nei precedenti Incontri abbiamo discusso dell'Essere nella accezione di "realmente esistente", come entità caratterizzata dall'interagire con le cose del nostro mondo e soggetta a **trasformazione** (generazione e corruzione). Notiamo qui che nel concetto di trasformazione come cambiamento di natura o di stato è presupposto il fluire del tempo, entità universale ed esterna agli esseri rispetto alla quale, per il cambiamento, si parla di un prima e un dopo.

Abbiamo considerato i diversi aspetti del concetto di Infinito, quantificatore che si può attribuire sia a cose reali nel senso sopra, che a entità formali tipiche della matematica come i numeri, le strutture frattali, ecc. In questo ultimo caso, il termine **spazio** ha una accezione astratta molto generale come insieme omogeneo di entità (numeri, punti, funzioni, ecc.) con proprietà formali, fissate da postulati, che consentono per esempio di dire "A è più grande di B" e, nel caso, "grande a piacere" quando si vuole esprimere operativamente l'idea di "infinito" evitando altre connotazioni metafisiche. Si tratta quindi **enti di ragione** a sé stanti, alieni al mondo sensibile, anche se la geometria è nata come astrazione degli oggetti estesi che osserviamo.

Lo **spazio fisico** reale, possibile soggetto quindi di trasformazione, è passato storicamente dal concetto newtoniano di "ricettacolo" inerte degli oggetti reali e della loro dinamica, al *apriori* kantiano di "condizione di possibilità" per essi, a quello di Leibniz di "tessuto delle relazioni o ordine tra le cose che coesistono al suo interno". Questa ultima visione in cui "non esiste spazio reale all'infuori dell'universo materiale e non c'è spazio senza corpi né corpi senza movimento" è confacente al paradigma cosmologico odierno della Relatività Generale (RG), che è un modello concreto del rapporto (equazioni di Einstein) tra la geometria dello spazio-tempo e il suo contenuto materiale.

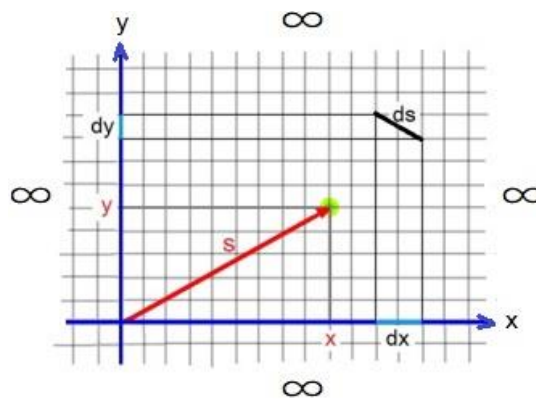
Nell'affrontare la geometria globale con cui la moderna cosmologia descrive l'universo visibile tridimensionale ci siamo posti il problema di come intendere l'**espansione** osservata nella eventualità che questo universo sia geometricamente infinito: l'espansione è evidentemente trasformazione delle dimensioni, ma che significa espandersi una cosa che già in partenza è infinita?

In questo contributo mettiamo in evidenza che lo spazio delle coordinate, che servono esclusivamente per determinare un punto, appartiene alla categoria delle entità matematiche formali e che la natura fisica dinamica dello spazio, eventuale soggetto di trasformazioni, viene data dalla introduzione di una prescrizione o "modello" di distanza (la metrica) tra i suoi punti coordinati.

Coordinate e distanze

Il tipo di spazio matematico più elementare viene dato dai numeri reali (nel senso matematico definitorio, non metafisico di “realmente esistenti”), positivi e/o negativi: un numero x in una dimensione, una coppia (x,y) di numeri se in due, un tripletto (x,y,z) se in tre, ecc. Le proprietà sono quelle che derivano dai postulati formali che definiscono i numeri reali e non ci sono altre connotazioni o significati di tipo metafisico (corruttibilità o altro) che si addicono alle cose fisiche. In particolare ognuno di questi numeri può prendere valori in un rango o intervallo finito o infinito, ancora nel senso operativo di “grande a piacere”, sia verso i valori negativi che positivi.

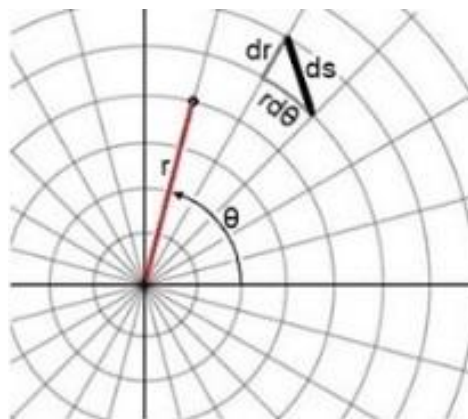
Nell'esempio a due dimensioni del piano cartesiano un punto (verde nella fig.1) è determinato dalle sue coordinate (x,y)



[1]

e lo spazio è infinito nel senso che x e y possono prendere valori tra $-\infty$ e $+\infty$. Per il fatto di averlo disegnato sulla carta si è inconsapevolmente adottata una definizione di distanza s tra punti: quella euclidea (che si misura con il righello sulla carta) $s^2 = x^2 + y^2$ tra il punto verde e l'origine $(0,0)$ delle coordinate, oppure $(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$ tra due punti vicini con differenze dx e dy di coordinate, in diretta applicazione del teorema di Pitagora. Questa è la distanza o metrica euclidea.

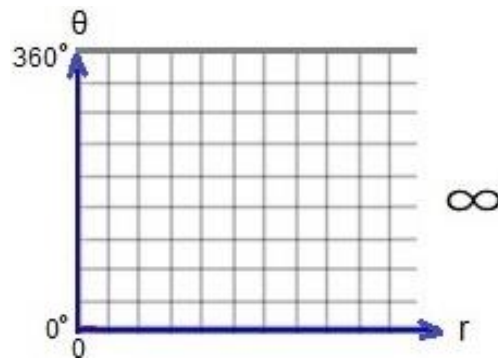
Basta adottare coordinate polari (r,θ) per rompere questo vincolo diretto tra coordinate e distanza



[2]

dove il rango della coordinata radiale r va da 0 a $+\infty$, e di quella angolare θ da 0 a 360° . In queste coordinate la distanza euclidea (righello sulla carta) cambia espressione a $(ds)^2 = (dr)^2 + r^2(d\theta)^2$.

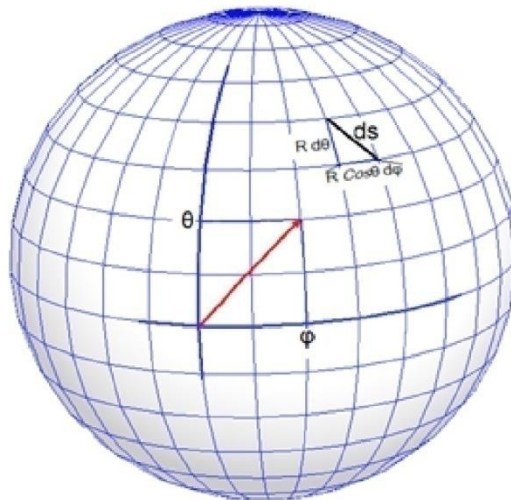
La differenza è resa più evidente rappresentando le coordinate polari (r, θ) alla maniera cartesiana



[3]

Allora le distanze che misuriamo su questo grafico non hanno relazione con quella “reale” tra i punti in esso rappresentati.

Ancora in due dimensioni, lo spazio in studio può essere finito. È il caso della superficie della sfera.



[4]

Le coordinate che determinano un punto sono la latitudine e la longitudine (θ, φ) , ma adesso entrambe hanno un rango di variazione finito, da -90° a $+90^\circ$ la prima e da -180° a $+180^\circ$ la seconda. La metrica è invece $(ds)^2 = R^2(d\theta)^2 + R^2\cos^2\theta(d\varphi)^2$, dove è importante notare che

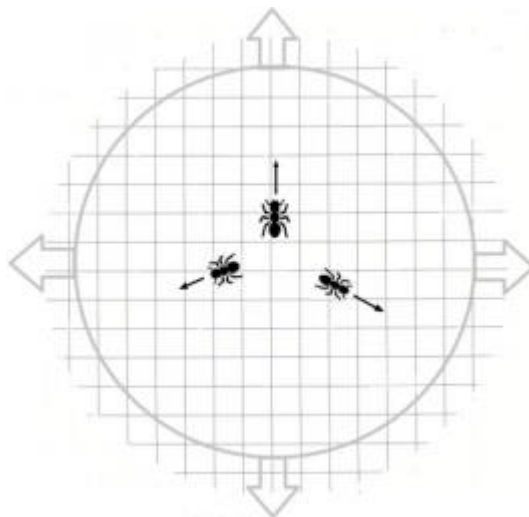
- Il disegno ha raffigurato la sfera vista “vista da fuori”, cioè immersa in uno spazio avvolgente infinito euclideo a tre dimensioni.
- Abbiamo ereditato dallo spazio avvolgente la distanza euclidea tra punti e l’abbiamo trasportata sulla superficie della sfera, da cui la forma particolare della metrica sopra.
- R è il raggio della sfera usata in questa costruzione didattica, ma in astratto abbiamo uno spazio con due coordinate (θ, φ) e una metrica dove R è solo un parametro che la caratterizza, facendo totale astrazione dal suo significato nella costruzione. Di fatto anche l’immaginare il nostro spazio bidimensionale come immerso in uno euclideo a tre dimensioni è inessenziale.

La estrapolazione di queste relazioni e proprietà a spazi di più dimensioni è immediata. In tre dimensioni usiamo coordinate cartesiane (x,y,z) , polari (r,θ,φ) con r il raggio, se lo spazio è euclideo infinito, o tutte di tipo angolare (ρ,θ,φ) se lo spazio fosse finito come nella ipersfera 3D (che di nuovo non ha bisogno di essere concepita come immersa in quattro dimensioni euclidee!).

Le leggi della meccanica sono formulate in coordinate euclidee. Accelerazioni e velocità riguardano distanze percorse nella unità di tempo (dai corpi e dalla luce per primis), ma è distanza euclidea. In uno spazio ideale infinito euclideo la distanza “fisica” da percorrere è quella data dalla metrica euclidea. Se il moto avviene in uno spazio deformato dalla gravitazione, come postulato dalla RG, la distanza che ha significato fisico è data dalla metrica corrispondente dettata dal contenuto di materia. È in questo senso che la metrica dota lo spazio di qualità o natura fisica, elevandolo da entità matematica formale (spazio di coordinate) a entità “realmente esistente” e quindi trasformabile, cioè soggetto di una dinamica. Lo spazio vuoto infinito, contenitore impassibile, rimane una concezione dei filosofi perché nella realtà è sempre occupato da cose (materia, energia o altro). Anzi, per Leibniz questo spazio neanche esiste se non contiene cose.

Per introdurre la notazione usuale nella letteratura riscriviamo la metrica della superficie della sfera come $(ds)^2 = R^2[(d\theta)^2 + \cos^2\theta(d\varphi)^2]$. Questa espressione mette meglio in evidenza che il parametro R^2 ha la funzionalità di un “fattore di scala” nel senso che, mantenendo fisse le coordinate di due punti vicini (quindi anche le loro differenze $d\theta$ e $d\varphi$), la loro distanza si dilata o riduce di quel fattore. Ciò corrisponde alla idea di “gonfiare la sfera” pensata come un pallone elastico.

La stessa situazione si può avere anche per uno spazio infinito come quello euclideo: basta introdurre il fattore di scala R^2 nella corrispondente metrica $(ds)^2 = R^2[(dx)^2 + (dy)^2]$



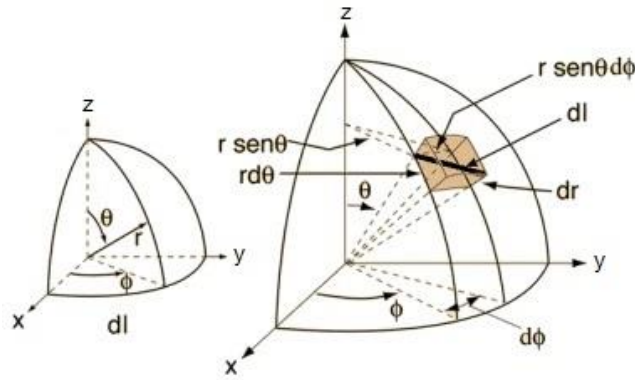
[5]

Qui l'immagine è quella di un telo elastico infinito ma che si stira in tutte le direzioni d'accordo con il fattore di scala R^2 . Le formiche “ferme” sul telo si allontanano in corrispondenza. Osserviamo che la possibilità di dilatarsi (o restringersi) di uno spazio è indipendente dal fatto che esso sia finito o infinito, e che il fattore di scala è un parametro intrinseco a detto spazio cioè non dipende da che lo abbiamo costruito come immerso in uno di dimensioni superiori o altra procedura.

Espansione dello spazio

Parlare di dinamica significa pensare a una dipendenza di qualcosa dal tempo. Qui considereremo l'evoluzione temporale del fattore di scala dello spazio tridimensionale come la descrive la moderna cosmologia. Nella Relatività Generale si indica con s o ds la "distanza-universo" che include il tempo. Per evitare confusioni indicheremo ora con l o dl la distanza spaziale che abbiamo considerato precedentemente. Per il fattore di scala adotteremo anche la notazione a della RG anziché R .

Nelle coordinate cartesiane (x,y,z) che si addicono a uno spazio euclideo l'elemento di distanza euclidea si scrive come $(dl)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2$, oppure $(dl)^2 = a^2[(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2]$ se dilatato con un fattore di scala a . Si tratta della trasposizione a tre dimensioni del caso del telo elastico bidimensionale. Tuttavia, data la simmetria sferica del contenuto omogeneo di materia dell'universo che si considera in cosmologia, conviene adottare le coordinate polari tridimensionali (r, θ, ϕ) . La trasposizione a tre dimensioni della figura [2] diventa



[6]

e la distanza euclidea è $(dl)^2 = (dr)^2 + r^2(d\theta)^2 + r^2 \sin^2 \theta (d\phi)^2$.

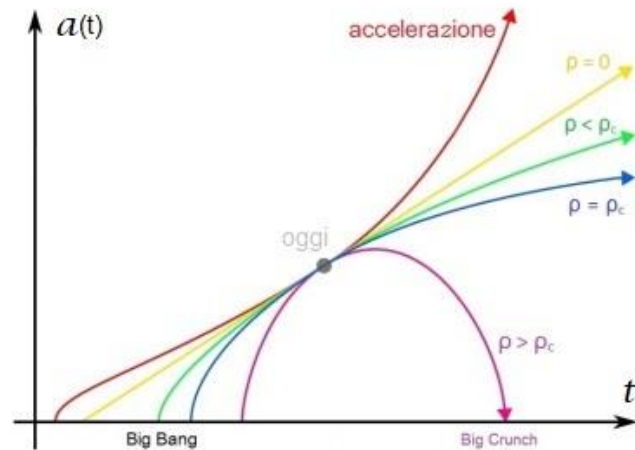
Le equazioni della RG per un universo riempito di materia con densità omogenea ρ hanno come soluzione la metrica spazio-temporale di Friedman-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW), di cui la parte spaziale è

$$dl^2 = a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - k r^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2(\theta) d\phi^2 \right]$$

Questa metrica descrive uno spazio tridimensionale con curvatura k (inverso del raggio di curvatura) e fattore di scala dipendente dal tempo $a(t)$. Se la densità di materia è uguale a un certo valore critico ρ_c allora $k=0$ e abbiamo la metrica

$$dl^2 = a^2(t) \left[dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2(\theta) d\phi^2 \right]$$

che corrisponde a uno spazio euclideo **infinito** in eterna espansione a ritmo moderato (fig.7).



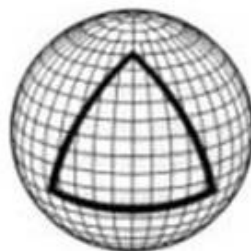
[7]

Se la densità è inferiore alla critica, allora $k < 0$ che corrisponde a uno spazio non euclideo **infinito** con geometria iperbolica che si espande eternamente a ritmo più forte.

Se la densità è superiore alla critica, allora $k > 0$ che corrisponde a uno spazio non euclideo **finito**, cioè chiuso come la ipersfera 3D, con geometria detta riemanniana o ellittica, che si espande a ritmo decrescente fino a fermarsi, tornare indietro e finire in un collasso finale o *Big Crunch*. Mostrando un certa simmetria con quello che succede allo spazio, qui anche **il tempo ha una estensione finita**.

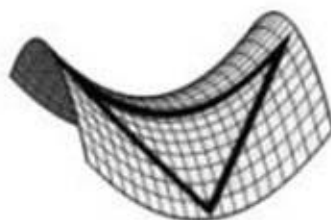
L'espansione accelerata che oggi si osserva non corrisponde a un contenuto di materia ordinaria ma a un "fluido cosmologico" esotico chiamato "energia oscura" e espresso nelle equazioni dalla cosiddetta "costante cosmologica". Non porta a una metrica FLRW ma di tipo De Sitter, con la parte spaziale euclidea.

Una allegoria bidimensionale, vista "da fuori" in tre dimensioni, di uno spazio finito "ellittico" è già stata raffigurata nella fig.4 :



[8]

mentre per quello iperbolico o a "sella di cavallo", è



[9]

oooo000000oooo